

Hong Kong Mathematics Olympiad (1989 – 90)

Heat Event (Individual)

香港數學競賽 (1989 – 90)

初賽項目 (個人)

1. Find the value of $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$.

求下式的值。

$$\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

2. If $b < 0$ and $2^{2b+4} - 20 \cdot 2^b + 4 = 0$, find b .

若 $b < 0$ 及 $2^{2b+4} - 20 \cdot 2^b + 4 = 0$, 求 b 。

3. If $f(a) = a - 2$ and $F(a, b) = a + b^2$, find $F(3, f(4))$.

若 $f(a) = a - 2$, 且 $F(a, b) = a + b^2$, 求 $F(3, f(4))$ 。

4. For positive integers a and b , define $a \# b = a^b + b^a$. If $2 \# w = 100$, find the value of w .

對正整數 a 及 b , 定義 $a \# b = a^b + b^a$, 若 $2 \# w = 100$, 求 w 的值。

5. a and b are constants. The straight line $2ax + 3by = 4a + 12b$ passes through a fixed point P whose coordinates do not depend on a and b . Find the coordinates of P .

a 及 b 為常數。直線 $2ax + 3by = 4a + 12b$ 恆過一定點 P (其座標與 a 和 b 無關)。求 P 點的座標。

6. The sines of the angles of a triangle are in the ratio $3 : 4 : 5$. If A is the smallest interior angle of the triangle and $\cos A = \frac{x}{5}$, find the value of x .

某三角形各內角正弦的比為 $3 : 4 : 5$ 。若 A 為該三角形的最小內角，且 $\cos A = \frac{x}{5}$, 求 x 的值。

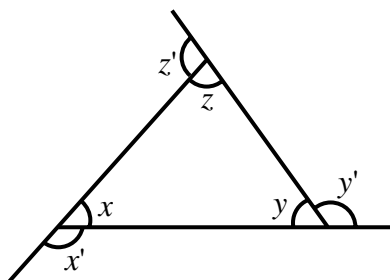
7. If $x + y = 9$, $y + z = 11$ and $z + x = 10$, find the value of xyz .

若 $x + y = 9$ 、 $y + z = 11$ 及 $z + x = 10$, 求 xyz 的值。

8. If α, β are the roots of the equation $2x^2 + 4x - 3 = 0$ and α^2, β^2 are the roots of the equation $x^2 + px + q = 0$, find the value of p .

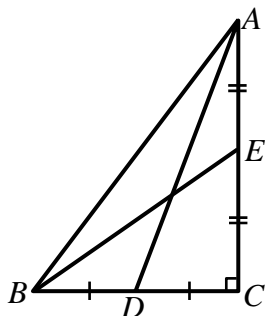
若 α, β 是方程 $2x^2 + 4x - 3 = 0$ 的根，且 α^2, β^2 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的根，求 p 的值。

9. If $x^{\log_{10} x} = \frac{x^3}{100}$ and $x > 10$, find the value of x .
 若 $x^{\log_{10} x} = \frac{x^3}{100}$ ，且 $x > 10$ ，求 x 的值。
10. Given that $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ and $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^n$ for positive integers n . Find a_4 .
 已知 $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ 及 $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^n$ ，其中 n 為正整數。求 a_4 。
11. Find the unit digit of 2137^{754} .
 求 2137^{754} 的個位數。
12. If $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 = 3$, find $r^3 + \frac{1}{r^3}$.
 若 $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 = 3$ ，求 $r^3 + \frac{1}{r^3}$ 。
13. A positive integer N , when divided by 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 and 2, leaves remainders 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 and 1 respectively. Find the least value of N .
 正整數 N 被 10、9、8、7、6、5、4、3 及 2 除所得的餘數依次是 9、8、7、6、5、4、3、2 及 1，求 N 的最小值。
14. If $\frac{1}{A} = \frac{\cos 45^\circ \sin 70^\circ \cos 60^\circ \tan 40^\circ}{\cos 340^\circ \sin 135^\circ \tan 220^\circ}$, find the value of A .
 若 $\frac{1}{A} = \frac{\cos 45^\circ \sin 70^\circ \cos 60^\circ \tan 40^\circ}{\cos 340^\circ \sin 135^\circ \tan 220^\circ}$ ，求 A 。
15. If 10 men can make 20 tables in 5 days, how many days are required to make 60 tables by 15 men?
 若 10 人需要 5 天製成 20 張檯，15 人需要多少天製成 60 張檯？
16. In the figure, the exterior angles of the triangle are in the ratio $x' : y' : z' = 4 : 5 : 6$ and the interior angles are in the ratio $x : y : z = a : b : 3$. Find the value of b .
 圖 1 的三角形的三個外角的比是 $x' : y' : z' = 4 : 5 : 6$ ，而三個內角的比是 $x : y : z = a : b : 3$ ，求 b 的值。



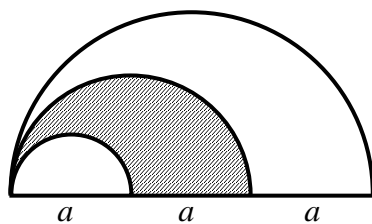
(Figure 1)(圖 1)

17. In $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ and D , E are the mid-points of BC and CA respectively. If $AD = 7$ and $BE = 4$, find the length of AB . (See figure 2.)
 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 及 D 、 E 依次為 BC 、 CA 的中點。若 $AD = 7$ 及 $BE = 4$ ，求 AB 的長度（參考圖 2）。



(Figure 2)(圖 2)

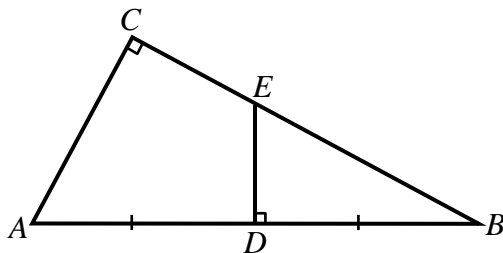
18. Figure 3 shows 3 semi-circles of diameters a , $2a$ and $3a$ respectively. Find the ratio of the area of the shaded part to that of the unshaded part.
 圖 3 中的三個半圓的直徑分別為 a 、 $2a$ 及 $3a$ 。求陰影部分的面積與沒有陰影部分的面積的比值。



(Figure 3)(圖 3)

19. Find the value of $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20}$.
 求 $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20}$ 的值。

20. In figure 4, $\angle C = 90^\circ$, $AD = DB$ and DE is perpendicular to AB . If $AB = 20$ and $AC = 12$, find the area of the quadrilateral $ADEC$.
 在圖 4 中， $\angle C = 90^\circ$ 、 $AD = DB$ 及 DE 垂直於 AB 。若 $AB = 20$ 及 $AC = 12$ ，求四邊形 $ADEC$ 的面積。



(Figure 4)(圖 4)